CONCOURS D'ADMISSION A L'E.S.M. DE SAINT-CYR EN 1983

•

MATHEMATIQUES II (4 h)

Les parties I, II, III, IV sont largement indépendantes.

E est un $\mathbf{R}$–espace vectoriel de dimension finie; $\mathcal{S}(E)$ est l'ensemble des formes bilinéaires symétriques sur E .

On rappelle que la forme bilinéaire symétrique φ est non dégénérée si :

$$[\forall y \in E,\ \varphi(x,y) = 0] \implies x = 0_E .$$

La forme quadratique associée à φ est notée Q , et la matrice de φ dans une base $\mathcal{B}$ est notée $\mathcal{M}(\varphi, \mathcal{B})$.

Un vecteur v de E est isotrope si $Q(v) = 0$.

La forme Q est dite définie si tout vecteur isotrope est nul. A étant un sous-espace vectoriel de E , on note

$$A^{\perp} = \left\{ v\ ;\ v \in E,\ \forall a \in A : \varphi(v,a) = 0 \right\} .$$

On rappelle les propriétés suivantes :

(α) Pour toute forme φ dans $\mathcal{S}(E)$, il existe une base formée de vecteurs v_i orthogonaux deux à deux pour $\varphi(i \neq j \implies \varphi(v_i, v_j) = 0)$.

(β) Pour une forme φ non dégénérée et un sous-espace vectoriel A de E , on a :

$$\dim A + \dim A^{\perp} = \dim E .$$

(γ) On note Q/A et φ/A les restrictions respectives de Q et φ à A .

(δ) La notation $\text{vect}(a_1, a_2, \ldots, a_p)$ représente le sous-espace vectoriel engendré par $(a_1, a_2, \ldots, a_p)$.

– I –

On appelle plan hyperbolique un couple (E, φ) où : $\dim E = 2$, φ est dans $\mathcal{S}(E)$, non dégénérée, Q est non définie. Dans cette partie, (E, φ) est un plan hyperbolique.

1) Montrer qu'il existe un vecteur $e_1 \in E$, $e_1 \neq 0_E$, tel que $Q(e_1) = 0$.

2) Montrer que pour tout vecteur e_2 tel que (e_1, e_2) soit une base $\mathcal{B}$ de E, alors $\varphi(e_1, e_2) \neq 0$.

3) Montrer qu'il existe u dans E tel que l'on ait simultanément :

(e_1, u) est une base de E, notée $\mathcal{B}'$

et $\varphi(e_1, u) = 1$

et $Q(u) = 0$

Préciser alors $\mathcal{M}(\varphi, \mathcal{B}')$

.../...

4) Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}''$ de E telle que

$$\mathcal{M}(\varphi, \mathcal{B}'') = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

5) $\mathcal{A}$ étant un espace affine associé à E, référé à un repère $\mathcal{R}$ d'origine 0, et k étant dans $\mathbf{R}$, préciser la nature de l'ensemble Γ si $\Gamma = \left\{ M, M \in \mathcal{A}, Q(\overrightarrow{OM}) = k \right\}$.

- II -

On suppose dans cette partie E de dimension 3, référé à une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Soit f un endomorphisme de E défini par $f(e_1) = e_2$, $f(e_2) = e_1$, $f(e_3) = e_3$.

1) Montrer que f est bijectif, déterminer f^2, préciser $\mathcal{A}$, matrice de f dans $\mathcal{B}$.

2) Montrer qu'il existe un plan vectoriel P dont tout élément est invariant par f.

3) Montrer que f est diagonalisable. Interpréter géométriquement f.

4) Soit une forme φ dans $\mathcal{S}(E)$ telle que $\mathcal{M}(\varphi, \mathcal{B}) = \mathcal{A}$

Montrer que la forme quadratique Q associée s'exprime dans $\mathcal{B}$ par :

$$Q(v) = 2x_1x_2 + x_3^2 \qquad \text{si} \quad v = \sum_{i=1}^{3} x_i e_i .$$

φ est-elle non dégénérée ? Q est-elle définie ?

5) Soit $E_1 = \text{vect}(e_1)$, $E_2 = \text{vect}(e_2)$, $E_3 = \text{vect}(e_3)$.

Déterminer $E_1^{\perp}$ et $E_2^{\perp}$.

6) Soit A un sous-espace vectoriel de E tel que $A \subset A^{\perp}$. Etudier dim A, et Q/A.

7) v et v' sont non nuls, isotropes, et tels que $\varphi(v, v') = 0$: montrer qu'alors $\{v, v'\}$ est liée.

8) On suppose, jusqu'à la fin du II, que E est euclidien et $\mathcal{B}$ orthonormée.

8-1) Montrer qu'il existe une base orthonormée $\mathcal{B}'$ de vecteurs propres $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ de f. Donner l'expression de Q dans $\mathcal{B}'$, en posant :

$$v = x_1' \epsilon_1 + x_2' \epsilon_2 + x_3' \epsilon_3$$

8-2) $\mathcal{A}$ étant un espace affine associé à E, et 0 un point de $\mathcal{A}$, montrer que la surface Σ, ensemble des points M tel que $Q(\overrightarrow{OM}) = 0$, est un cône de révolution, dont on précisera l'axe et le demi-angle au sommet.

9) En déduire que tout vecteur isotrope est somme de deux vecteurs non isotropes.

De même, établir que tout vecteur non isotrope est somme de deux vecteurs isotropes.

Ces décompositions sont-elles uniques ?

- III -

On se propose de généraliser les résultats de II.9 à un espace vectoriel E de dimension n, muni d'une forme dans $\mathcal{S}(E)$ non dégénérée, la forme quadratique Q associée étant non définie.

1) Montrer qu'il existe un vecteur u de E non isotrope.

Soit v un vecteur isotrope ; à l'aide de λu, λ étant un réel, montrer que v est somme de deux vecteurs non isotropes.

2) Soit un vecteur v non isotrope. Montrer que $\text{vect}(v) \oplus [\text{vect}(v)]^{\perp} = E$.

Montrer qu'il existe un vecteur x dans $[\text{vect}(v)]^{\perp}$ tel que : $Q(x) = -Q(v)$.

En déduire que v est somme de deux vecteurs isotropes.

- IV -

On suppose dans cette partie que $\dim E = 5$. On appelle base de Witt pour la forme φ de $\mathcal{S}(E)$ une base $\mathcal{W} = (a_1, a_2, b_1, b_2, c)$ de E telle que si on pose $A = \text{vect}(a_1, a_2)$, $B = \text{vect}(b_1, b_2)$ et $C = \text{vect}(c)$, alors les conditions suivantes sont vérifiées (Q étant toujours associée à φ) :

$$\begin{cases} Q/A = 0\,,\ Q/B = 0\,,\ \varphi(a_i, b_j) = \delta_{ij} \\ A \subset C^{\perp}\,,\ B \subset C^{\perp}\,,\ Q(c) = 1\,. \end{cases} \qquad \left(\text{avec} \begin{array}{ll} \delta_{ij} = 1 & \text{si } i = j \\ \delta_{ij} = 0 & \text{si } i \neq j \end{array} \right)$$

On appelle φ— base de E, une base $\mathcal{B}$ formée de vecteurs ϵ_i, telle que :

$$Q(\epsilon_i) = 1 \text{ si } i \leqslant 3\,,\ Q(\epsilon_i) = -1 \text{ si } i > 3 \quad \text{et} \quad \varphi(\epsilon_i, \epsilon_j) = 0 \text{ si } i \neq j\,.$$

1) Soit une forme φ de $\mathcal{S}(E)$ ayant une base de Witt

1-1) Donner $\mathcal{M}(\varphi, \mathcal{W})$. Montrer que φ est non dégénérée et Q non définie.

1-2) Etudier $A^{\perp}$ et $B^{\perp}$, montrer que $A^{\perp} \cap B = \{0_E\}$ $C = (A \oplus B)^{\perp}$.

2) Donner les expressions de Q dans $\mathcal{W}$ et dans $\mathcal{B}$.

3) Montrer que s'il existe dans E une base de Witt pour φ, il existe aussi une φ— base dans E .

4) Montrer que s'il existe dans E une φ– base, alors il existe aussi une base de Witt pour φ dans E .

5) On pose : $A \oplus B = H$. Montrer que H est somme directe de deux plans hyperboliques $(P_1, \varphi/P_1)$ et $(P_2, \varphi/P_2)$ [voir partie I] .

– V –

On suppose toujours $\dim E = 5$. F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de E .

Soient φ_F dans $\mathcal{S}(F)$ et φ_G dans $\mathcal{S}(G)$. On pose

si $x = x_F + x_G$ et $y = y_F + y_G$, (x et y étant éléments de E)

$$\varphi(x, y) = \varphi_F(x_F, y_F) + \varphi_G(x_G, y_G)$$

et on note

$$\varphi = \varphi_F \oplus \varphi_G .$$

1) Montrer que φ est dans $\mathcal{S}(E)$. Montrer que pour φ , $F \subset G^{\perp}$.

2) Montrer que φ est non dégénérée si et seulement si φ_F et φ_G le sont.

3) La forme quadratique Q associée à φ est-elle définie si les formes quadratiques Q_F et Q_G associées à φ_F et φ_G le sont ?

4) On appelle espace hyperbolique un plan hyperbolique ou un couple $(P_1 \oplus P_2, \varphi_1 \oplus \varphi_2)$ où (P_1, φ_1) et (P_2, φ_2) sont deux plans hyperboliques.

Montrer que toute forme φ non dégénérée sur E est telle que :

- ou bien sa forme quadratique associée est définie
- ou bien elle est du type $\varphi_H \oplus \varphi_D$

(H, φ_H) étant un espace hyperbolique

φ_D étant associée à une forme quadratique définie sur D .

FIN